Programm

der

Realschule zu Erfurt,

mit welchem

zu der am 28. und 29. März 1855 Statt findenden

Prüfung ihrer Zöglinge

die vorgesetzten Behörden und die Freunde der Anstalt

ehrerbietigst einladet

der Director

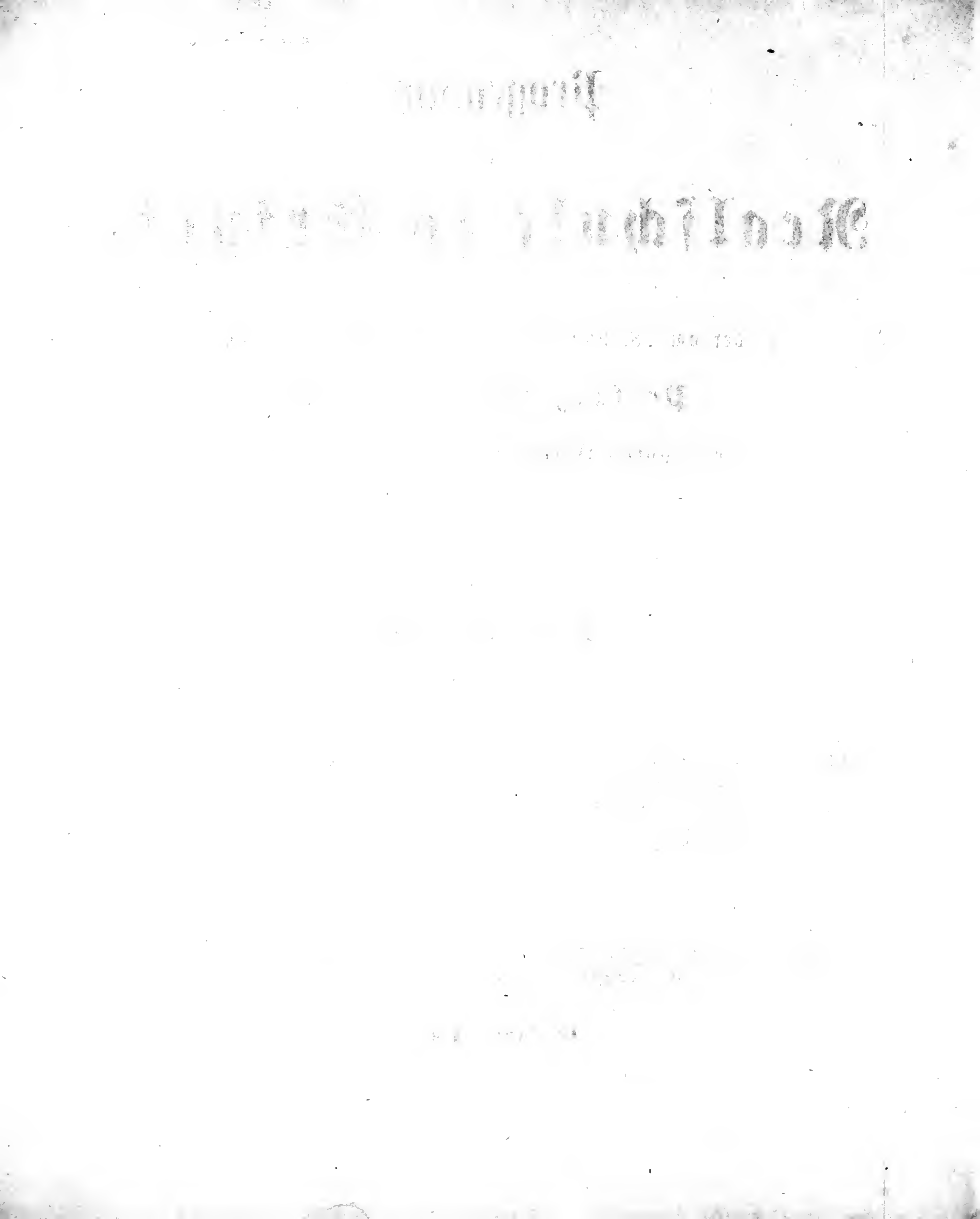
Dr. C. F. Koch.

Inhalt: 1) Abhandlung des Professors Dr. Unger: „Die Bedeutung der zwei Bücher des Apollonius von den Berührungen für die geometrische Analysis.“
2) Unterrichts-Plan der Realschule für die Zeit von Ostern 1855 bis Ostern 1857, vom Director.
3) Schul-Nachrichten.



Erfurt, 1855.

Gedruckt bei August Stenger.



Bedeutung der zwei Bücher des Apollonius von den Berührungen für die geometrische Analysis.

Von den Schriften der vier berühmtesten griechischen Mathematiker, von den Schriften des Euklid, Archimedes, Apollonius und Diophant, sind die des Apollonius von einer ganz besonderen Bedeutung deswegen, weil in denselben ein reichhaltiges Material zu einem ausführlichen Systeme der geometrischen Analysis vorgefunden wird. Leider sind von diesen Schriften nur sparsame Bruchstücke uns erhalten, die Pappus mittheilt in dem siebenten Buche seiner Collectaneen;[1]) nur mit Hülfe von arabischen Manuscripten war es möglich, einige dieser Schriften ziemlich vollständig wieder herzustellen.

Die verschiedenen mathematischen Untersuchungen, mit welchen Apollonius sich beschäftigt hat, sind enthalten zunächst in den Abhandlungen

De sectione rationis,
De sectione determinata und
De sectione spatii.

Jede dieser Abhandlungen bestand aus zwei Büchern und mit Hülfe von arabischen Uebersetzungen hat E. Halley es versucht sie sämmtlich wieder herzustellen.[2]) Die Collectaneen des Pappus enthalten nur zu der Schrift von dem Verhältnißschnitte 21 und zu der von dem bestimmten Schnitte 43 Lehnsätze. Mit der zweiten der hier angeführten Abhandlungen haben auch Robert Simson,[3]) Snellius,[4]) Marino Ghetaldi und Gionnini sich beschäftigt. Eine englische Uebersetzung derselben, die nach Snellius gearbeitet ist, besitzen wir von John Lawson[5]) und eine deutsche frei nach R. Simson bearbeitet von Diesterweg.[6])

Zu den Schriften des Apollonius gehören ferner zwei Bücher de inclinationibus, von welchen Pappus die erhaltenen Bruchstücke in den Sätzen 65 bis 95 in dem siebenten Buche seiner Collectaneen mittheilt. Wieder hergestellt sind diese zwei Bücher von Marino Ghetaldi,[7]) englisch bearbeitet von

---

[1]) Pappi Alexandrini Mathematicae collectiones, a Federico Commandino Urbinato in Latinum conversae et commentariis illustratae. Pisauri 1588.

[2]) Apollonii Pergaei de sectione rationis libri duo ex Arab. lat. versi et de sectione Spatii libri duo restit. ab E. Halley. Oxon. 1706.

[3]) Apollonii Pergaei de Sectione determinata libri II. restituti a Rob. Simson (Opera reliqua. Glasc. 1776).

[4]) Apollonius Batavus auctore Willebrod Snellio. Lugd. Bat. 1608.

[5]) Die englische Uebersetzung von Lawson ist in London 1772 erschienen; derselben ist eine neue Wiederherstellung dieser Schrift von Wales beigefügt.

[6]) Apollonius von Perga zwei Bücher vom bestimmten Schnitt nach der Wiederherstellung von Robert Simson frei bearbeitet von W. A. Diesterweg. Mainz 1822.

[7]) Apollonius redivivus seu Marini Ghetaldi restituta Apollonii pergaei inclinationum geometrica 2 Partes. Venedig 1607.

Horsley und von Reuben Burrow [8]) und eine freie Bearbeitung derselben besitzen wir von Diesterweg. [9])

Eine Abhandlung des Apollonius de locis planis ist leider fast gänzlich verloren gegangen, so daß Pappus nur 8 Sätze derselben anzugeben vermag. Paul de Fermat hat mit der Herstellung derselben sich beschäftigt in seinen Operibus variis, Van Schooten in dem dritten Buche seiner Exercitationes mathematicae und Robert Simson in einer diesem Gegenstande ausschließlich gewidmeten Schrift. [10]) Eine deutsche Bearbeitung nach den beiden letzteren, welcher eine Sammlung geometrischer Aufgaben beigefügt ist, besitzen wir von Camerer. [11])

Zu den wichtigsten Arbeiten des Apollonius gehören die zwei Bücher de tactionibus, deren Inhalt und Bedeutung hier den Gegenstand einer ausführlichen Besprechung bilden soll, und ist hier nur noch zu bemerken, daß wir außer den bisher angeführten Schriften noch ein ausführliches Werk über die Kegelschnitte von Apollonius besitzen, welches von allen seinen Schriften am vollständigsten uns erhalten worden ist. Von den 8 Büchern, aus welchen dasselbe bestand, sind die vier ersten noch im Urtexte vorhanden und die 3 folgenden in einer arabischen Uebersetzung, so daß nur das achte Buch verloren gegangen ist, und dieses hat E. Halley, dem wir überhaupt die ausführlichsten Mittheilungen über das Werk de Conicorum verdanken, wieder herzustellen versucht. [12]) Es enthält dieses Buch die Anwendungen der in dem siebenten Buche behandelten Lehre von den conjugirten Durchmessern.

Den ausschließlichen Gegenstand der zwei Bücher von den Berührungen bildet die Aufgabe:

„Grade Linien und Punkte sind der Lage nach und Kreise der Größe und der Lage nach gegeben, man soll einen Kreis beschreiben, der drei von diesen Bestimmungsstücken berührt."

Pappus, nachdem er den Gegenstand der Schrift näher bezeichnet und auf die einfachere Gattung von Aufgaben aufmerksam gemacht hat, bei welchen der Radius des zu beschreibenden Kreises zu den gegebenen Stücken gehört, führt blos an:

„Das erste Buch von den Berührungen enthält sechs, das zweite Buch vier Aufgaben. Die zwei Bücher haben 21 Hülfssätze, der Aufgaben sind 60."

Diesem folgen die Hülfssätze unter 23 Nummern und bei denselben ist zum Theil die Nummer der Aufgabe mit angegeben, zu welcher der Hülfssatz gehört. Die auf diese Weise nach und nach angeführten Aufgaben sind die Aufgaben 5, 12, 16, 17, 18, 19, 24, 25, 31 und 52, ohne daß von einer derselben der Inhalt selbst näher angegeben ist.

Von den Hülfssätzen selbst enthalten mehrere einfache Umkehrungen Euklidischer Sätze und namentlich von den Sätzen 11, 12 und 32 des dritten Buches der Elemente, und einige enthalten unmittelbare Folgerungen aus Euklidischen Sätzen. Von einem ganz besonderen Interesse aber sind die unter №. 7 und 11 angeführten Lehnsätze: Wenn zwei Kreise sich berühren und man legt durch den Berührungspunkt zwei grade Linien, die durch Kreislinien begrenzt werden, und verbindet die Endpunkte der gezogenen Linien in jedem der beiden Kreise, so sind diese Verbindungslinien parallel. Unter №. 9 wird nachgewiesen, daß auch die Umkehrung von №. 7 Gültigkeit hat, bei №. 11 aber ist die Umkehrung des Satzes unmittelbar

---

[8]) Apollonii Pergaei geometrical treatise on inclinations restored by Horsley. Oxf. 1770 and by Reuben Burrow. London 1780.

[9]) Apollonius von Perga, die Bücher de inclinationibus frei bearbeitet von W. A. Diesterweg. Berlin 1823.

[10]) Apollonii Pergaei locorum planorum libri duo restit. a Robert Simson. Glascow 1749.

[11]) Apollonius von Perga ebene Oerter. Wiederhergestellt von Schooten und R. Simson. Aus dem Lateinischen übersetzt und mit einer Sammlung geometrischer Aufgaben begleitet von J. W. Camerer. Leipzig 1796.

[12]) Apollonii Pergaei conicorum libri octo. Priores quatuor cum lemmatis Pappi et commentarius Eutocii graece et posteriorum tres ex diversis Mss. arabicis in latinum versi; octavus autem restitutus. Opera Edmunge Halley. Oxoniae 1710.

mit aufgenommen. Mehrere der folgenden Sätze, welche die Auflösung einiger wichtigen Aufgaben enthalten, sind von den hier angeführten abhängig. [13])

Dieses nun ist das ganze von des Apollonius zwei Büchern von den Berührungen uns erhaltene Material.

Bezeichnet man einen gegebenen Punkt mit p, eine der Lage nach gegebene Linie mit l und einen der Größe und der Lage nach gegebenen Kreis mit k, und soll ein Kreis beschrieben werden, der drei von diesen Bestimmungsstücken berührt, so führt diese Aufgabe zu 10 verschiedenen allgemeinen Aufgaben, bei welchen die Bestimmungsstücke sind:

1.	$p' \; p'' \; p'''$	6.	$p' \; p'' \; k$
2.	$l' \; l'' \; l'''$	7.	$l \; p \; k$
3.	$p \; l' \; l''$	8.	$l \; k' \; k''$
4.	$p' \; p'' \; l$	9.	$p \; k' \; k''$
5.	$l' \; l'' \; k$	10.	$k' \; k'' \; k'''$

Bei einer näheren Betrachtung dieser verschiedenen Fälle ergiebt sich nun

a. daß die Aufgaben № 1 und 2 einer nähern Erläuterung nicht bedürfen, da sie vollkommen übereinstimmen mit den Aufgaben Satz 4 und 5 in dem vierten Buche der Elemente des Euklid;

b. daß die Aufgabe № 5 auf № 3 zurückgeführt werden kann, denn ist der Radius von $k = r$ und der Mittelpunkt in c, und legt man Parallelen mit l' und l'' in einem Abstande $= r$ und beschreibt einen Kreis, der diese Parallelen berührt und dessen Umfang durch c geht, so ist der Mittelpunkt x dieses Kreises zugleich auch der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, der $l' \; l''$ und k berühren soll;

c. daß in einer ähnlichen Weise sich die Aufgabe № 8 auf № 7 und № 10 auf № 9 zurückführen läßt.

Bei einer ganz allgemeinen Behandlung der Lehre von den Berührungen kommt es lediglich darauf an nachzuweisen, wie die fünf Aufgaben 3, 4, 6, 7 und 9 sich lösen lassen; soll der Gegenstand aber erschöpfend behandelt werden, so muß man nicht blos jede der angeführten zehn Aufgaben ausführlich erläutern, sondern es müssen auch alle die Fälle näher beleuchtet werden, die durch die möglichen verschiedenen Lagen der gegebenen Stücke und durch die besondere Lage, die der zu beschreibende Kreis in Beziehung auf die gegebenen Stücke haben soll, bedingt sind. Hierdurch wird die Zahl der besonders zu behandelnden Aufgaben in einer bedeutenden Weise vermehrt, so daß man, wenn alle verschiedenen Umstände berücksichtigt werden sollen, eine bei weitem größere Zahl von Aufgaben erhält, als nach den Angaben des Pappus von Apollonius behandelt worden sind. Da nun Apollonius in den zwei Büchern von den Berührungen nicht mehr als 60 verschiedene Aufgaben behandelt, während doch bei einer vollständigen Disposition eine bei weitem größere Anzahl von Fällen sich ergeben; so muß sich entweder nachweisen lassen, daß alle hier möglichen Fälle auf 60 verschiedene Aufgaben sich zurückführen lassen, oder man muß annehmen, daß der Gegenstand von Apollonius nicht vollständig erschöpft worden sei. Da nun aber das Eine nicht zulässig ist und das Andere nicht angenommen werden kann, so wird man nothwendig zu der Folgerung geführt, daß die Aufgaben von den Berührungen zu einem besondern Zwecke müssen bearbeitet worden sein, und daß von allen möglichen Aufgaben nur diejenigen aufgenommen worden sind, die diesem besonderen Zwecke entsprechen.

---

[13]) Eine vollständige Angabe der unter 23 Nummern von Pappus angegebenen Hülfssätze zu den zwei Büchern von den Berührungen findet man Seite 84—90 in dem zweiten Bande der von mir herausgegebenen Schrift: Praktische Uebungen für angehende Mathematiker. Leipzig 1829.

Die Mathematiker haben viel mit den Aufgaben von den Berührungen sich beschäftigt und Vieta hat hierzu wohl hauptsächlich die erste Veranlassung gegeben. Seine Schrift Apollonius Gallus [14]) kann indessen nicht als eine Wiederherstellung der zwei Bücher von den Berührungen angesehen werden, weil derselbe überhaupt nur im Allgemeinen mit dem vorliegenden Problem sich beschäftigt hat. Der Scharfsinn indessen, mit welchem der Gegenstand von ihm behandelt worden ist, mußte nothwendig die Aufmerksamkeit der Mathematiker erregen. In welchem Maaße dieses der Fall war, geht daraus hervor, daß Adrianus Romanus durch diese Schrift des Vieta veranlaßt worden ist, nach Frankreich zu reisen, um mit demselben über mathematische Gegenstände sich zu besprechen. Marino Ghetaldi [15]) hat es versucht, die Arbeit des Vieta zu ergänzen, doch beschränkt er lediglich sich darauf, die besondern Fälle näher zu erläutern, bei welchen der Radius des zu beschreibenden Kreises als gegeben angenommen wird. In der neuern Zeit hat Camerer [16]) die Schrift des Vieta, verbunden mit den Hülfssätzen des Pappus und durch Zusätze und Berechnungen vermehrt, herausgegeben. In dieser Schrift finden wir eine vollständige Disposition über alle möglichen verschiedenen Fälle, die bei einer ausführlichen Bearbeitung des Gegenstandes berücksichtigt werden müssen. Ein ernstlicher Versuch, die zwei Bücher von den Berührungen in ihrer ursprünglichen Gestalt wieder herzustellen, ist von C. G. Hauman gemacht worden. [17]) Er gibt in der Einleitung vollständig den Text des Pappus und hierauf die 60 Aufgaben mit ihren Auflösungen, die nach seinem Dafürhalten von Apollonius müssen behandelt worden sein. Nach Hauman haben auch Vieth in Dessau [18]) und Christmann in Tübingen [19]) eine Wiederherstellung der zwei Bücher von den Berührungen versucht. In England hat John Lawson [20]) mit diesem Gegenstande sich beschäftigt. Von seiner Schrift sind kurz nach einander zwei Auflagen erschienen, während die deutschen Schriften nur einen sparsamen Absatz gefunden.

Unabhängig von der Absicht, die zwei Bücher des Apollonius in ihrer ursprünglichen Form wieder herzustellen, haben die berühmtesten Mathematiker vielfach mit dieser Aufgabe sich beschäftigt, und selbst Frauen haben diesem Gegenstande ihre Aufmerksamkeit gewidmet. Die Prinzessin Elisabeth, Tochter des Churfürsten von der Pfalz, hat mit Descartes in einem Briefwechsel gestanden, dessen Gegenstand die Aufgabe war, einen Kreis zu beschreiben, der drei der Größe und der Lage nach gegebenen Kreise berührt. Sie hat ihm eine Auflösung zugeschickt, die von demselben sehr gerühmt wird. [21]) Newton zeigte in seiner Arithmetica universalis, wie diese Aufgabe auf eine einfachere zurückgeführt werden kann, und L'Hospital führt eben diese Aufgabe auf eine Gleichung zurück, aus der er eine geometrische Construction für den Fall ableitet, wenn zwei von den drei Kreisen gleich groß sind. In Lamberts deutschem Briefwechsel findet man zwei Auflösungen von derselben Aufgabe, zu welchen er durch eine polnische Gräfin die Veranlassung erhalten hat, die einem Freunde Lamberts die Frage vorlegte, wie es möglich sei, ein Rad zu construiren, das drei der Größe und der Lage nach gegebene Räder gleichzeitig in Bewegung setzt. Euler hat noch in seinen alten Tagen diesen Aufgaben seine Aufmerksamkeit gewidmet. Man findet eine diesen Gegenstand betreffende Abhandlung desselben in den Abhandlungen der Petersburger Akademie von

---

[14]) Apollonius Gallus seu Francisci Vietae restitutio Apollonii librorum II. de tactionibus. Paris 1600.

[15]) Apollonii Galli Supplementum, editum a Marino Ghetaldi. Venedig 1607.

[16]) Apollonii de tactionibus quae supersunt ac maxime lemmata Pappi in hos libros graece nunc primum edita e codicibus Msptis cum Vieta librorum Apollonii restitutione adjectis observationibus compatationibus ac problematis Apolloniani historia a J. G. Camerer. Gotha et Amsterdami 1795.

[17]) Versuch einer Wiederherstellung der Bücher des Apollonius von Perga von den Berührungen, von D. C. Gottlieb Hauman. Breslau 1817.

[18]) Leitfaden zur vollständigen Bearbeitung des von Vieta wieder hergestellten Apollonius. Von G. U. A. Vieth. Dessau 1820.

[19]) Apollonius Suevus sive tactionum problema nunc demum restitutum a Guil. L. Christmann. Tübingen 1822.

[20]) Apollonii P. two books concerning tangencies by John Lawson. London 1771. Second. edit. ib 1773.

[21]) Cartesii epistolae T. III. 72 et 73.

dem Jahre 1788.[22]) Der von Euler für die wichtigste dieser Aufgaben entwickelten Gleichung hat Fuss noch zwei analytische Auflösungen beigefügt und er leitet aus der einen derselben eine scharfsinnige geometrische Construction ab.

Wenn hiernach sich herausstellt, wie es uns an einer reichhaltigen Lectüre über die Probleme von den Berührungen nicht fehlt, so ist es um so auffallender, daß in allen, diesen Gegenstand betreffenden, Schriften und Abhandlungen immer nur die Aufgaben an und für sich genommen behandelt sind, ohne daß auf eine besondere Bedeutung derselben hingewiesen wird. Ueber einen besonderen Zweck, den Apollonius bei Ausarbeitung seiner Schrift gehabt haben könnte, findet man nirgends etwas Befriedigendes. Wenn Pappus anführt, daß alle die in den zwei Büchern von den Berührungen vorkommenden Probleme dazu dienen sollen, um denen, welche die Elemente der Geometrie begriffen haben, etwas zu geben, woran sie das Erlernte üben und sich daran vervollkommnen könnten, so kann diese Angabe schon deswegen nicht befriedigen, weil Aufgaben-Sammlungen in dem Sinne, wie sie die Neuzeit in den mannichfachsten Formen aufzuweisen hat, bei den Alten nicht vorkommen. So oft diese mit geometrischen Untersuchungen sich beschäftigten, war es immer ein directer Fortschritt, den sie erzielen wollten, und da dieser bedingt wird durch die Fähigkeit, geometrische Aufgaben zu lösen, und nur durch die Beschäftigung mit der geometrischen Analysis diese Fähigkeit erlangt werden kann, so stehen alle geometrischen Untersuchungen der Alten mehr oder weniger in einem innigen Zusammenhange mit einer Theorie der geometrischen Analysis. Was die Schriften des Apollonius, von diesem Gesichtspunkte aus betrachtet, betrifft, so stellt sich nicht nur heraus, wie in denselben ein reichhaltiges Material zu einem ausführlichen Lehrgebäude der geometrischen Analysis gegeben ist, sondern man erkennt zugleich mit Sicherheit, daß in der Schrift von den Berührungen einer der wichtigsten Abschnitte eines solchen Lehrgebäudes ausführlich behandelt ist.

Die geometrische Analysis soll eine Anleitung geben zur Auflösung geometrischer Aufgaben, aber nicht eine Anleitung, die aus Vorschriften besteht, welche zu befolgen sind, wie dieses bei den Aufgaben der Elemente der Fall ist und sein muß, sondern eine Anleitung, durch die eine Uebung erzielt wird, die Abhängigkeit verschiedener Raumgebilde von einander zu erkennen. Es besteht die geometrische Analysis wesentlich darin, daß man das Raumgebilde, welches durch die Auflösung der vorliegenden Aufgabe gefunden werden soll, auf ein anderes zurückführt, von dem es abhängig ist und dieses wieder auf ein anderes u. s. f., bis man auf ein Gebilde geführt wird, welches durch das Gegebene der Aufgabe selbst gegeben ist, und so einen Ueberblick zu gewinnen sucht, durch den mit Sicherheit beurtheilt werden kann, welche Abhängigkeit statt findet zwischen dem Gegebenen der Aufgabe und dem Gesuchten.[23])

Das erste Material zu einer wissenschaftlichen Behandlung der geometrischen Analysis ist uns durch die Data des Euklid gegeben, welche aus einer Sammlung von Lehrsätzen bestehen, durch die nachgewiesen wird, wie aus gegebenen Größen oder Verhältnissen andere folgen. Bereits in der ersten Hälfte des 16. Jahrhunderts hat man diese wichtige Schrift des Euklid in weiteren Kreisen zu verbreiten gesucht. Man findet sie theils in der Sammlung Euklidischer Schriften und theils in besonderen Ausgaben. Von den ersten verdient namentlich die des Gregory[24]) angeführt zu werden, der die Data nach einer Uebersetzung des Hardy[25]) aufgenommen hat, und von den besonderen Ausgaben der Data sind die wichtigsten die von Burrow,[26]) von der drei verschiedene Ausgaben erschienen sind, und die englische Uebersetzung

---

[22]) Novis Actis Ac. Petrop. VI. a 1788. Euler's Abhandlung ist von dem Jahre 1779.

[23]) Eine ausführliche Erläuterung der geometrischen Analysis findet man in dem fünften Abschnitt des ersten Theils von Unger's „Praktische Anleitung zur Auflösung geometrischer Aufgaben." Erfurt 1843.

[24]) Euklidis quae supersunt omnia. Ex recensione Davidis Gregorii. Oxon. 1703.

[25]) Euklidis data et Marini philosophi commentarius cum versione lat. et Scholiis cura Claudii Hardy. Paris 1625.

[25]) Euklidis data succincte demonstrata. London 1659, Canterb. 1675 und Osnabrück 1675.

von R. Simson, von welcher wir zwei deutsche Bearbeitungen von Schwab [27]) und von Wurm [28]) besitzen.

Eine weitere Ausbildung erhält die geometrische Analysis durch die Lehre von den geometrischen Oertern, eine Lehre, die ihre Grundlage in der Betrachtung hat, daß es bei der Auflösung geometrischer Aufgaben immer darauf ankommt, die Lage gewisser Punkte zu finden. Lassen sich nun zwei Linien der Lage nach angeben, von welchen man weiß, daß in jeder derselben ein gesuchter Punkt liegen muß, so ist dieser dadurch bestimmt, weil er nur der Durchschnittspunkt beider sein kann. Eine Linie nun, von der sich nachweisen läßt, daß in ihr der gesuchte Punkt liegen muß, ist ein geometrischer Ort desselben. Ist diese Linie eine grade oder eine Kreislinie, so nennt man sie einen ebenen Ort im Gegensatz zu den körperlichen Oertern, welche Benennung den Kegelschnittslinien beigelegt wird.

Die Elementar-Geometrie hat keine anderen Constructions-Hülfsmittel als die durch die Postulate ihr zugestandenen, sie bedient sich also nur der graden Linien und des Kreises, und es sind deshalb auch nur die ebenen Oerter die Hülfsmittel, welche bei geometrischen Aufgaben — deren Auflösung mittelst der Elemente soll ausgeführt werden können — in Anwendung kommen. Diese Betrachtung führt zu dem bemerkenswerthen Resultate, daß alle Aufgaben, deren Lösung lediglich durch Anwendung der Sätze der Elementar-Geometrie möglich sein soll, entweder durch zwei grade Linien, oder durch zwei Kreise, oder durch eine grade Linie und einen Kreis ihre Erledigung finden müssen. Eine eigenthümliche Erscheinung ist es, daß, während in der Regel bei der Anwendung einer combinatorischen Entwicklung der Gegenstand so zersplittert wird, daß eine große Zahl der sich herausstellenden verschiedenen Fälle, ihrer geringen Bedeutung wegen, bei der weiteren Behandlung ausgeschieden werden muß, hier im Gegentheil so einfache Formen sich herausstellen, daß es für den ersten Anblick überraschend erscheinen muß, wie die drei einfachen Aufgaben:

„Zwei grade Linien zu finden, oder zwei Kreise, oder eine grade Linie und einen Kreis, welchen die durch die zu lösende Aufgabe bestimmten Bedingungen zukommen," alle möglichen geometrischen Aufgaben erschöpfend enthalten können.

Erst die weitere Einsicht, daß das Finden der graden Linien der Lage nach und der erforderlichen Kreise der Größe und der Lage nach selbst wieder durch das Auffinden anderer geometrischer Oerter bedingt wird, führt zu der Ueberzeugung, daß die wenigen einfachen Formen, auf welche alle Aufgaben sich zurückführen lassen, die möglichst größte Mannichfaltigkeit keinesweges ausschließen.*)

Es ist einleuchtend, daß die Lehre von den geometrischen Oertern den wichtigsten Abschnitt eines Lehrgebäudes der geometrischen Analysis bilden muß. Daß Apollonius diesem Gegenstande seine ganze Aufmerksamkeit ganz besonders zugewendet hat, ergibt sich nicht blos daraus, daß eine eigene Schrift über

---

[27]) Euklid's Data verbessert und vermehrt von Robert Simson, aus dem Englischen übersetzt und mit einer Sammlung geometrischer nach der analytischen Methode der Alten aufgelös'ter Probleme begleitet von J. L. Schwab. Stuttgart 1780.

[28]) Euklid's Data nach dem Griechischen mit Robert Simson's Zusätzen herausgegeben von J. F. Wurm. Berlin 1825.

*) Es verdient bei dieser Gelegenheit angeführt zu werden, daß die Determination einer Aufgabe, die Feststellung der Bedingungen also, welchen das Gegebene derselbe entsprechen muß, wenn die Auflösung ausführbar sein soll, ebenfalls durch drei einfache Sätze in ihren Grundzügen erschöpft wird, nämlich:

1) Sind die beiden geometrischen Oerter grade Linien, so dürfen sie nicht parallel sein, wenn der Durchschnittspunkt in einer endlichen Entfernung liegen soll.

2) Sind es zwei Kreise, so darf der Abstand ihrer Mittelpunkte von einander nicht größer sein als $r' + r''$ und nicht kleiner als $r' - r''$.

3) Wenn der eine geometrische Ort ein Kreis und der andere eine grade Linie ist, so darf der normale Abstand derselben von dem Mittelpunkt des Kreises nicht größer sein als r.

Die weitere Ausführung der Untersuchung über die Determination der Aufgaben bildet, wie sich unmittelbar erkennen läßt, einen besondern Abschnitt eines wissenschaftlichen Lehrgebäudes der geometrischen Analysis.

die ebenen Oerter von ihm verfaßt worden ist, sondern es tritt dieses deutlich noch hervor aus seiner umfassenden Abhandlung über die Kegelschnitte. Das dritte Buch dieser Schrift enthält die Lehrsätze, die bei den Constructionen ihre Anwendung finden, von welchen bei den Aufgaben Gebrauch gemacht wird, deren Auflösung nur mit Hülfe der Kegelschnitte sich ausführen lassen; und in dem vierten Buche werden die Bedingungen entwickelt, unter welchen Kegelschnittslinien einander schneiden. Es enthalten diese beiden Bücher also offenbar eine ausführliche Untersuchung über die körperlichen Oerter. Wenn sonach Apollonius mit den ebenen Oertern und auch mit den körperlichen sich beschäftigt hat, so darf wohl mit Sicherheit vorausgesetzt werden, daß auch die zwischen beiden noch vorhandene Lücke von ihm nicht übersehen worden ist, und daß er auch sie auszufüllen jedenfalls den Versuch gemacht haben wird.

Die Lehre von den Berührungen nun ist es, durch die allein eine natürliche Verbindung der Untersuchungen über die ebenen und über die körperlichen Oerter hergestellt werden kann, und durch die zwei Bücher des Apollonius von den Berührungen erhält dieser Gegenstand auf die einfachste Weise seine Erledigung.

Die Richtigkeit dieser Behauptung läßt durch folgende Betrachtung sich nachweisen: Werden die Aufgaben außer Acht gelassen, zu deren Lösung Curven gebraucht werden, verschieden von den Kegelschnittslinien, deren Lösung also durch die Benutzung lineärer Oerter bedingt ist, so können alle übrigen geometrischen Aufgaben unterschieden werden:

1) in solche, deren Analysis zu ebenen Oertern führt, die also unmittelbar ihre Auflösung erhalten durch Anwendung des Kreises und der graden Linien,
2) in solche, bei deren Analysis man auf körperliche Oerter kommt, so daß ihre Lösung nur durch die Construction von Kegelschnittslinien ausgeführt werden kann, und
3) in Aufgaben, bei deren Analysis sich zwar herausstellt, daß mindestens einer der zur Ermittelung der Lage der gesuchten Punkte erforderlichen geometrischen Oerter eine Kegelschnittslinie ist, bei deren Auflösung aber die Curve selbst nicht construirt zu werden braucht, weil der nur erforderliche Durchschnittspunkt durch alleinige Anwendung der Postulate der Elemente gefunden werden kann.

Folgende einfache Fälle werden genügen, um von dieser dritten Gattung der Aufgaben eine richtige Vorstellung sich zu verschaffen.

a) Soll ein Punkt x gefunden werden, der von zwei Punkten p′ und p″ und von einer der Lage nach gegebenen graden Linie l gleichweit absteht, so führt die Analysis zu den Folgerungen, daß der eine geometrische Ort von x die grade Linie ist, welche die Verbindungslinie von p′ und p″ normal halbirt, und der andere die Parabel sein muß, deren Brennpunkt p und deren Directrix l gegeben sind. Unmittelbar erhält also diese Aufgabe ihre Lösung durch die Construction einer der Form und Lage nach gegebenen Parabel. Bei Anwendung dieser Auflösung würde die Aufgabe nicht zu den Aufgaben gezählt werden können, die ihre Lösung durch die Hülfsmittel erhalten, welche die Geometrie in ihren Elementen darbietet; eine nähere Betrachtung aber führt zu der Einsicht, daß die Aufgabe auf die zurückgeführt werden kann: einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene Punkte und eine der Lage nach gegebene grade Linie berührt, eine Aufgabe, die, wie in der Lehre von den Berührungen nachgewiesen wird, durch eine einfache Anwendung des Satzes III. 36 ihre Lösung erhält. Es liegt also hier eine Aufgabe vor, wo der Durchschnittspunkt einer graden Linie und einer Parabel, ohne daß diese construirt zu werden braucht, durch alleinige Anwendung der Hülfsmittel gefunden werden kann, welche die Elementar-Geometrie darbietet.*)

*) Eine weitere Untersuchung führt hier zu der Folgerung, daß wenn zwei Parabeln eine gemeinschaftliche der Lage nach gegebene Directrix haben und es sind ihre Brennpunkte der Lage nach gegeben, so läßt der Durchschnittspunkt dieser Parabeln durch eine einfache Anwendung der Elemente sich finden. Ebenso können auch die Durchschnittspunkte zweier Parabeln gefunden werden, wenn sie einen gemeinschaftlichen der Lage nach gegebenen Brennpunkt haben, und die Directrix einer jeden ist der Lage nach gegeben.

b) Soll ein Punkt x gefunden werden, der von zwei Punkten p' und p'' gleichweit absteht, und dessen Abstand von einem dritten Punkt p''' um d größer ist, als der von p' und p'', so ist hier der eine geometrische Ort ebenfalls eine grade Linie, der andere aber ist eine Hyperbel, von welcher p' und p''' die Brennpunkte sind, und deren erste Axe = d ist. Die Hyperbel ist also der Form und Lage nach gegeben und die Aufgabe würde zu den Aufgaben gezählt werden müssen, bei deren Lösung ein körperlicher Ort gebraucht wird, wenn sich nicht nachweisen ließ, daß in dem vorliegenden Falle der Durchschnittspunkt der graden Linie und der Hyperbel gefunden werden kann, ohne daß diese construirt zu werden braucht. Die Aufgabe läßt auf die Form sich zurückführen: Einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene Punkte und einen der Größe und der Lage nach gegebenen Kreis berührt, sie gehört also zu den Aufgaben von den Berührungen und erhält ihre Auflösung durch die von Pappus unter No. 7 und 10 angeführten Lehnsätze, eine Aufgabe, die nach den Angaben von Pappus die sechszehnte in den zwei Büchern des Apollonius von den Berührungen bildet.*)

So wie in den beiden hier mitgetheilten Fällen, so läßt für alle Aufgaben ohne Ausnahme, bei welchen die geometrischen Oerter der gesuchten Punkte zwar Kegelschnittslinien sind, bei deren Lösung aber die Curven selbst nicht construirt zu werden brauchen, um ihre Durchschnittspunkte zu finden, sich nachweisen, daß die Ermittelung der Durchschnittspunkte immer durch die Lösung einer Aufgabe von den Berührungen bedingt wird.

Die zwei Bücher des Apollonius von den Berührungen haben keinen andern Zweck, als alle die Fälle erschöpfend darzustellen, in welchen die Analysis einer geometrischen Aufgabe auf körperliche Oerter führt, wo es jedoch möglich ist, die zur Lösung der Aufgabe nur erforderlichen Durchschnittspunkte ohne Construction der Curven zu finden. Wir erhalten also durch die Lehre von den Berührungen die Hülfsmittel zu einer elementaren Auflösung aller der Aufgaben, die zu der oben angeführten dritten Gattung gehören. Hiermit erhält zugleich auch die bereits angeregte Frage ihre Erledigung: Weshalb Apollonius von den verschiedenen möglichen Aufgaben der Berührungen deren nur 60 behandelt hat? Es ist einleuchtend, daß er nur mit den Aufgaben sich beschäftigen konnte, die entweder unmittelbar dem besonderen Zwecke entsprechen, oder die als Hülfssätze für dieselben nothwendig aufgenommen werden mußten. Nur bei einer Disposition über das Thema von den Berührungen, bei welchen der hier ausgesprochene Zweck maaßgebend ist, dürfte es möglich sein, eine Wiederherstellung der zwei Bücher von den Berührungen im Geiste des Apollonius zu Stande zu bringen.

In der neuesten Zeit ist das Studium der Geometrie in dem Geiste der Alten so zurückgedrängt, daß kaum zu erwarten ist, es werde Jemand damit sich befassen, das hier angeregte, allerdings viele Schwierigkeiten darbietende Thema ausführlich zu behandeln. Man muß dieses um so mehr bedauern, als eben die Methode der Alten nur allein es ist, durch welche der geometrische Unterricht seinen didactischen Zwecken zu entsprechen vermag. Eine höhere Bedeutung aber muß dem Studium der Werke des Apollonius deswegen beigelegt werden, weil in denselben nicht blos die Lehre von den geometrischen Oertern behandelt wird, sondern in seinen Schriften die Grundlage zu einem umfassenden Lehrgebäude der geometrischen Analysis gegeben ist. Die Abhandlungen de sectione rationis, de sectione determinata und de inclinationibus dürfen nicht als von einander unabhängige Schriften angesehen werden, sie bilden die einzelnen Abschnitte eines vollständigen Systems der geometrischen Analysis.

Wenn die Richtung, welche das Studium der Geometrie in der neuern Zeit genommen hat, wenig geeignet ist, um eine gründliche Beschäftigung mit der Geometrie der Alten zu befördern, so erklärt sich

*) Eine ausführliche Behandlung dieser Aufgabe führt zu der Folgerung, daß, wenn zwei Hyperbeln einen gemeinschaftlichen Brennpunkt haben und es sind die Brennpunkte derselben der Lage nach gegeben, so lassen ihre Durchschnittspunkte durch einfache Anwendung der Sätze von den ebenen Oertern sich finden.

diese Erscheinung ganz einfach dadurch, daß mit der Entdeckung und Ausbildung der mathematischen Analysis ein so reicher und fruchtbringender Stoff vorlag, daß die Mathematiker vollauf zu thun hatten und noch zu thun haben, um denselben sich anzueignen und die weiteren Folgerungen aus demselben abzuleiten. So finden wir denn, daß die Franzosen, welche im 16ten und zum Theil noch im 17ten Jahrhundert ernstlich mit dem Studium der Alten sich beschäftigten, dieses Studium ganz aufgegeben haben, um ihre Thätigkeit ausschließlich der mathematischen Analysis und der analytischen Methode zu widmen. Die Engländer sind dem Studium der Alten länger treu geblieben, als es bei den Franzosen der Fall war, sie haben noch aus dem 18ten Jahrhundert eine reichhaltige dahin einschlagende Literatur aufzuweisen; das 19te Jahrhundert aber bietet durchaus nichts Beachtenswerthes in dieser Beziehung, ihre Beschäftigungen haben eine fast ausschließlich praktische Richtung genommen. In Deutschland haben zwar in der neuesten Zeit einzelne Mathematiker ernstlich noch mit der Geometrie der Alten sich beschäftigt, und namentlich hat Diesterweg in Bonn vor noch nicht ganz 30 Jahren mehrere der Schriften des Apollonius nach Robert Simson frei bearbeitet herausgegeben; es hat diese Thätigkeit aber in weiteren Kreisen den Anklang nicht gefunden, den sie wohl verdiente. Gegenwärtig kennt man nur noch die Elemente des Euklid. Man wird durch diese Betrachtung zu der Frage gedrängt: Sollte die Geometrie der Alten jetzt völlig antiquirt sein, ist keine Hoffnung vorhanden, daß eine rege Beschäftigung mit derselben wieder zur Geltung kommen könnte? Die neuesten Erscheinungen auf dem Gebiete der Geometrie sprechen dafür, daß eine Verwendung der uns von den Alten überkommenen geometrischen Untersuchungen über kurz oder lang mit Zuversicht erwartet werden darf. Schon die vor mehreren Jahren von der Jablonskyschen Gesellschaft in Leipzig gestellte Preisfrage: „Wie lassen die neuern Erweiterungen der Geometrie in einer natürlichen Weise mit den Elementen des Euklid sich in Verbindung bringen?“ gibt den Beleg dafür, daß eine höchst achtbare wissenschaftliche Corporation es anerkennt, wie die von den Alten uns überkommenen Grundlagen aller geometrischen Studien nicht aufgegeben werden dürfen; und wenn die Erfolge dieser so wichtigen Preisfrage in weiteren Kreisen nicht bekannt geworden sind, so ist dieses zwar zu bedauern, die Anregung aber, die dadurch gegeben worden ist, darf deshalb nicht als verloren angesehen werden. Es ist nun einmal Art der Deutschen, daß die in ihrer Mitte zu Tage kommenden Ideen erst alsdann Anklang finden, nachdem die Ausländer sie anerkannt und sich derselben bemächtigt haben. Den reichsten Stoff zu den Erweiterungen der Geometrie finden wir unbedingt in den Schriften von Jacob Steiner über die Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander,[29]) und leider hat von diesem ausgezeichneten auf mehrere Bände berechneten Werke — wegen Mangels an Theilnahme — nur der erste Band die Presse verlassen können. Erst nachdem Chasles seine Schriften über diesen Gegenstand[30]) veröffentlicht hat, Schriften, in welchen die Untersuchungen von Steiner und der sich ihm anschließenden deutschen Schriftsteller mannichfach benutzt sind, ohne daß einer derselben genannt wird — Chasles hält es für ausreichend ganz einfach zu bemerken, daß er wegen Mangels an Kenntniß der deutschen Sprache über die Leistungen der Deutschen auf diesem Gebiete weitere Auskunft zu geben nicht vermag — ist eine regere Theilnahme für diese Studien vorhanden, man hat sich beeilt, die Arbeiten von Chasles durch eine deutsche Uebersetzung[31]) uns zugänglicher zu machen. Durch diese Bemerkungen sollen indessen keineswegs weder die Verdienste, die Chasles sich erworben, noch die der Franzosen überhaupt, welchen wir die ersten Anregungen zu den neuern Untersuchungen verdanken, und die auch fortwährend in einer lebhaften Weise mit einer weitern Ausbildung der neuern Methode sich beschäftigen, verkannt werden; wir wollen aber auch das nicht übersehen, was die Deutschen bisher geleistet, und wenn diese Leistungen zunächst auch nur aus zerstreuten Abhandlungen be-

---

[29]) Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. Berlin 1832.

[30]) Aperçu historique sur l'origine et le developpement de méthode en géometrie und Traité de géometrie superieure par Chasles. Paris 1852.

[31]) Von den ersten der beiden von Chasles hier angeführten Schriften hat Sohncke eine deutsche Uebersetzung geliefert unter dem Titel: Geschichte der Geometrie hauptsächlich mit Bezug auf die neuern Methoden.

2*

standen, so haben wir doch jetzt auch Schriften, in welchen man angefangen hat, das Material zusammen zu stellen und systematisch zu ordnen, und verdient hier namentlich die Schrift von **Paulus** angeführt zu werden.[32])

Wenn es eines Theils feststeht, daß die Beschäftigung mit geometrischen Untersuchungen nach der neuern Methode unzweifelhaft bereits in der nächsten Zeit allgemeine Geltung erhalten muß, und andern Theils ebenso zuverlässig vorausgesetzt werden darf, daß die erste Grundlage für alle Geometrie, wie **Euklid** sie uns gegeben, in ihrer Geltung und in ihrem Einflusse dadurch nicht beeinträchtigt werden darf, so ist es gewiß von Wichtigkeit, näher zu bestimmen, welche Bedeutung den Apollonischen Schriften für die neuern Methoden zugestanden werden muß? Eine Entscheidung hierüber ergibt sich unmittelbar durch folgende Betrachtung:

Die neuere Geometrie unterscheidet sich von der eigentlichen analytischen wesentlich dadurch, daß sie statt der Coordinaten der unmittelbaren Verhältnisse sich bedient, und sie beginnt damit, daß sie der Größe und der Lage nach gegebene grade Linien durch Punkte, die in denselben oder in deren Verlängerung angenommen werden, theilt, und die Verhältnisse der hierdurch erhaltenen Abschnitte näher untersucht, sie wird hierdurch unmittelbar auf die harmonische Theilung geführt und von dieser zu den noch bei weitem wichtigeren Untersuchungen über die anharmonischen Theilungen. Müssen wir nun zugestehen, daß der Satz VI. 10 des Euklid, so bald man den zweiten Theilpunkt in der verlängerten Linie sucht, unmittelbar die harmonische Theilung gibt, und daß durch die Verbindung dieses Satzes mit VI. 3 die Grundlage für die Untersuchung über die harmonischen Strahlen und hiermit zugleich die für die harmonischen Eigenschaften des Kreises geboten ist, und läßt sich ferner nicht verkennen, daß durch das zweite Buch der Elemente die einfachsten Betrachtungen über die Verhältnisse der Abschnitte uns vollständig vorliegen, und daß durch die Anwendungen, die hiervon gemacht werden, in III. 35 und 36 die weiteren Untersuchungen in Beziehung auf den Kreis angebahnt werden, und sehen wir nun, daß es grade diese Sätze sind, welche **Apollonius** in den uns erhaltenen Lehnsätzen zu den zwei Büchern von den Berührungen weiter ausführt, so liegt schon hierin eine Thatsache, die uns zu der Ueberzeugung führen muß, daß die Grundlagen zu der neuern Methode von den alten Geometern erkannt worden ist. Wahrhaft überrascht aber werden wir, wenn von diesem Gesichtspunkte aus wir uns beschäftigen mit den Schriften des **Apollonius** über den bestimmten Schnitt und über den Verhältnißschnitt 2c., und ich will die Hoffnung nicht aufgeben, daß es mir noch vergönnt sein werde, die Resultate, zu welcher ausführliche Untersuchungen über das Verhältniß dieser Schriften zu den Methoden der neuern Geometrie führen, der Oeffentlichkeit übergeben zu können.

---

[32]) Grundlinien der neuern ebenen Geometrie von Chr. **Paulus**. Stuttgart 1853.

Unterrichts-Plan für die Realschule in der Zeit von Ostern 1855 bis Ostern 1857.

Der Ostern 1853 aufgestellte Unterrichts-Plan erfährt in folgenden Punkten eine wesentliche Umänderung oder Ergänzung:

1) Ostern v. J. vermehrte sich die Schülerzahl um 58, namentlich wuchs sie in Sexta in dem Maße, daß die vorgesetzten Behörden den Antrag auf Spaltung dieser Klasse in 2 Parallel-Klassen genehmigten. Zur Förderung des Unterrichts wurden die Sextaner nicht nach einem zufälligen Merkmale, sondern so in 2 Klassen vertheilt, daß die fähigeren und die älteren Schüler in die Sexta a, die übrigen in die Sexta b eintraten. Diese Weise der Scheidung brachte bei denselben Lehrern und demselben Unterrichts-Stoff bald eine solche Kluft zwischen den Leistungen beider Klassen hervor, daß sie als Stufen-Klassen erschienen. Um aber die Sexta a und Sexta b als wirkliche Stufen-Klassen in den Schulplan aufzunehmen, wurde es nothwendig, die Sexta b den Vorklassen und nicht den Realklassen zuzuzählen, also das den Vorklassen zugewiesene Unterrichts-Material auf 3 Stufen zu vertheilen, weil die Erziehung zur Spannung des Geistes und zur Anstrengung bei der Arbeit, welche in den 8 und 9jährigen Schülern der Sexta b allein erstrebt werden soll, in diesem Alter bei einer größeren Mannichfaltigkeit der Unterrichts-Gegenstände, wie sie in den eigentlichen Realklassen vorkommen muß, nicht wohl erreicht werden kann. Die vorgesetzten Behörden haben den hierauf bezüglichen Antrag genehmigt und angeordnet, daß die folgende Vertheilung der Lektionen auf die 9 Klassen von Ostern 1855 ab in Kraft tritt: